Adı Soyadı :
Numara :

07.01.2020

MAT 103 LİNEER CEBİR I DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

SORU 1 W_1 ve W_2 bir V vektör uzayının alt uzayları olsunlar. Eğer $V = W_1 \oplus W_2$ ise $\forall \alpha \in V$ vektörü $\alpha_1 \in W_1$ ve $\alpha_2 \in W_2$ olmak üzere $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ şeklinde tek türlü yazılabilir, ispatlayınız.

SORU 2 Bir V iç çarpım uzayında $\forall x, y \in V$ için

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

SORU 3 V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\forall\, x, y, z \in V$ için $\{x, y, z\}$ cümlesi lineer bağımsız ise $\{x+y, x-y, x+y+2z\}$ cümlesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

SORU 4 IR^3de standard iç çarpımı göz önüne alarak IR^3'ün $(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ vektörünün dahil olduğu bir ortonormal bazını bulunuz.

SORU 5

$$A : IR^2 \to IR^3$$
$$(x_1, x_2) \to A(x_1, x_2) = (0, x_1, x_2)$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün lineer olup olmadığını gösteriniz.

NOT : Sorular Eşit Puanlı ve Süre 90 dakikadır.

BAŞARILAR
Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

Cevap Anahtarı

1) $V = W_1 \oplus W_2$ olsun. O halde $V = W_1 + W_2$ ve $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ olur. Yani $\forall \alpha \in V$ vektörü $\alpha_1 \in W_1$ ve $\alpha_2 \in W_2$ olmak üzere $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ olarak yazılabilir. Şimdi de bu yazılımın tek türlü olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\beta_1 \in W_1$ ve $\beta_2 \in W_2$ olmak üzere $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ olsun.

$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2$ old.
$\alpha_1 - \beta_1$ ve $\beta_2 - \alpha_2$ vektörleri de W_1 ve W_2 ye dahildir. Yani bu vektörler $W_1 \cap W_2$'nin yani $\{0\}$ ın elemanıdır. O halde $\alpha_1 - \beta_1 = 0$ ve $\beta_2 - \alpha_2 = 0$ dır. Yani $\alpha_1 = \beta_1$, $\beta_2 = \alpha_2$ dir. O halde bu yazılım tek türlüdür.

2) Bir V iç çarpım uzayında $\forall x,y \in V$ için

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle$$
$$= \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle +$$
$$- \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle - \langle y,y \rangle$$
$$\overset{\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle}{=} 4\langle x,y \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x,y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

3) $\forall x,y,z \in V$ için $\{x,y,z\}$ cümlesi lineer bağımsız olsun. $\{x+y, x-y, x+y+2z\}$ lineer bağımsız olur mu?

$$\lambda_1(x+y) + \lambda_2(x-y) + \lambda_3(x+y+2z) = 0 \text{ iken}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ oluyorsa lineer bağımsızdır. Yukarıdaki eşitlik x,y,z'ye göre düzenlenirse

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x + (\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)y + 2\lambda_3 z = 0 \text{ olur.}$$

$$\xrightarrow{\{x,y,z\}\text{ lineer bağımsız}} \left.\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_3 = 0 \\ \left.\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1-\lambda_2=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \end{array}$$

O halde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ olduğundan

$\{x+y, x-y, x+y+2z\}$ cümlesi lineer bağımsızdır.

4) $\mathbb{R}^3$'ün $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ vektörünün dahil olduğu bir bazını bulalım.

$u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ olsun

$u_2 = (x_1, x_2, x_3)$

$u_3 = (y_1, y_2, y_3)$ 'ü belirleyelim.

$\langle u_1, u_2 \rangle = 0 \Rightarrow 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$\langle u_1, u_3 \rangle = 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 - y_3 = 0$

$\langle u_2, u_3 \rangle = 0 \Rightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$. Ayrıca

$\| u_2 \| = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$\| u_3 \| = 1 \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$

u_2'yi bu eşitlikleri sağlayacak şekilde seçelim.

$u_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ olsun. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olur.

Bu durumda
$$\left.\begin{array}{l} 2y_1 + y_2 - y_3 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_2 = -y_3 \\ y_1 = y_3 \\ 3y_1^2 = 1 \\ \Rightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

$u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ yazılabilir

$\{u_1, u_2, u_3\}$, $\mathbb{R}^3$'ün bir ortonormal bazıdır.

5) $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x_1, x_2) \longrightarrow A(x_1, x_2) = (0, x_1, x_2)$ dönüşümü veriliyor.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ için $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } A(x+y) = A(x_1+y_1, x_2+y_2) \\ \quad = (0, x_1+y_1, x_2+y_2) \\ \quad = (0, x_1, x_2) + (0, y_1, y_2) \\ \quad = A(x) + A(y) \\ \text{ii) } A(\lambda x) = A(\lambda x_1, \lambda x_2) \\ \quad = (0, \lambda x_1, \lambda x_2) \\ \quad = (\lambda . 0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda (0, x_1, x_2) \\ \quad = \lambda A(x) \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ lineerdir.}$$